



1 Yoyó con cuerda despreciable¹

En este documento se describe el problema clásico de la Física elemental en el que un yoyó, modelado como un disco, cae bajo la acción de la gravedad, sujeto con una cuerda inextensible y sin masa a un techo, en la que existe un par de fricción entre la periferia del yoyó y la cuerda, tal como se describe en el simulador del Laboratorio de las Aulas Virtuales de iesjorgemanrique.com

¹Este es un documento del Laboratorio de Juan María Fernández Martínez en las Aulas Virtuales del Instituto Jorge Manrique de Palencia en www.iesjorgemanrique.com

Los conceptos usados en la resolución de este problema son esenciales en el temario de Física de Bachillerato y por tanto los detalles del tratamiento deben ser comprendidos totalmente por el alumno, que debe trabajar los casos de estudio propuestos.

1.1 Resolución del problema dinámico

Esta versión del problema consta de:

- una yoyó móvil, que se trata como un disco de masa m y radio R ($= 1$ metro, en valor por defecto).
- una cuerda inextensible y sin masa, que tiene un par de fricción , ajustable

Se toma como origen de coordenadas la posición del yoyó con las medidas por defecto. La posición del Centro de Masas del yoyó se describe con la coordenada y , con sentido positivo hacia abajo. Esta coordenada y es una medida de la distancia del yoyó al nivel horizontal del eje en el punto de partida. La velocidad inicial siempre es nula.

1.1.1 Resolución por el método de las energías

La energía cinética total del sistema es la suma de las Energía cinética y potencial del yoyó. La Energía cinética es la suma de la Energía de traslación del Centro de Masas y la Energía cinética de rotación del yoyó respecto del eje horizontal que pasa por el Centro de masas

$$\begin{aligned} E_{c_{total}} &= E_{c_{CM}} + E_{c_{rot}} \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I \left(\frac{v}{R}\right)^2 \end{aligned} \quad (1)$$

En esta ecuación $I = \frac{1}{2}mR^2$ es el momento de inercia del yoyó (un disco) y $\frac{v}{R}$ es la velocidad angular de la polea, porque la cuerda no desliza sobre la periferia.

La definición de la energía potencial requiere determinar antes el origen de energía potenciales. Se tomará como cero de las energías potenciales el nivel horizontal del eje del yoyó con los parámetros por defecto. Así, las energías potenciales de la caída serán negativas, debido a que el yoyó estará siempre debajo del nivel cero. Esta elección es similar a la que se hace cuando se resuelve

un problema de gravitación en un techo de un edificio y se toma como cero de energías potenciales el techo.

La energía potencial del yoyó es la de una partícula puntual que tuviera toda la masa concentrada en el Centro de Masas:

$$U_p = -mgy \quad (2)$$

donde debe notarse el signo menos, justificado antes.

La energía mecánica total del sistema es, por tanto:

$$\begin{aligned} E_{mecánica} &= E_{total} + U_p \\ &= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I \left(\frac{v}{R}\right)^2 - mgy \end{aligned} \quad (3)$$

Cuando hay pérdidas por rozamiento, la *Energía mecánica total del sistema no se conserva*, sino que disminuye debido al trabajo de rozamiento y se cumple que:

$$\frac{dE_{mecánica}}{dt} = -f_r v \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}v \left[\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I \frac{v^2}{R^2} \right] + \frac{d}{dt}[-mgy] \\ &= -f_r v \end{aligned} \quad (5)$$

En la ecuación anterior hay que tener en cuenta que el rozamiento lo hace la cuerda sobre la periferia de la polea, y que la periferia de la polea y la cuerda se mueven con velocidad relativa v .

Hay que tener en cuenta que

$$\frac{d}{dt}[v^2] = 2v \frac{dv}{dt} = 2va \quad (6)$$

donde a es la aceleración del sistema; además

$$\frac{d}{dt}[y] = v \quad (7)$$

y que v es la velocidad, de modo que la variación de la energía mecánica siempre es negativa (se pierde energía mecánica).

Según esos resultados intermedios, la ecuación (5) es

$$mv a + \frac{I}{R^2} v a = mg v - f_r v \quad (8)$$

Agrupando términos, cancelando la velocidad que aparece en todos ellos, y despejando la aceleración del sistema:

$$a = \frac{mg - f_r}{m + \frac{I}{R^2}} \quad (9)$$

Como la aceleración es constante durante la caída, el movimiento de los cuerpos es uniformemente acelerado en ese tramo. El simulador considera que al colisionar el yoyó con el suelo rebota elásticamente, con lo que se produce un cambio de signo en la velocidad. En el tramo de subida cambia la rotación del sistema y cambia el par de fricción, de modo que

$$a = \frac{mg + f_r}{m + \frac{I}{R^2}} \quad (10)$$

En la siguiente sección se verá el cálculo de la tensión en la cuerda.

1.1.2 Resolución por el método dinámico

Para aplicar el método dinámico, hay que aplicar el *Principio de Liberación*, que consiste en sustituir todas las ligaduras² del sistema por fuerzas. En el problema que nos ocupa esto es sencillo y puede hacerse de modo sistemático, pues las fuerzas que hay son el peso del yoyó, la tensión de la cuerda y el par de fricción que se opone a la rotación del disco.

En la resolución dinámica de problemas esencialmente unidimensionales, como este, para aplicar el Principio de Liberación debe seguirse el siguiente procedimiento:

²Se denomina "ligadura" a toda condición impuesta al movimiento de un cuerpo: movimiento obligado en una superficie, unión por cuerdas, son casos típicos de ligaduras.

1. localizar todas las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo
2. asignar un sentido positivo al movimiento, que aquí será el de caída del yoyó.
3. sumar todas las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo y aplicar la Segunda Ley de Newton , haciendo entrar las fuerzas con un signo positivo si van a favor del sentido positivo y con signo negativo si van en contra.
4. sumar todos los torques -o momentos de fuerza- que actúen sobre los cuerpos rotantes,según la fórmula *fuerza x brazo_de_palanca* ³, con un signo positivo si el torque hace girar a favor del sentido positivo, y con signo negativo en caso contrario, e igualar la suma al producto del momento de inercia por la aceleración angular del cuerpo rotante, $I\alpha$.

En el simulador pueden verse las fuerzas que actúan sobre cada cuerpo, activando los selectores correspondientes.

Para la bajada del yoyó (al final se contempla el caso de la subida):

yoyó

- su peso, mg , dirigido hacia abajo y que, por tanto, a favor del sentido positivo en lo que al movimiento de traslación del Centro de Masas se refiere.
- la fuerza que a través de la cuerda actúa sobre el yoyó, T , que apunta hacia arriba y por tanto en contra del sentido positivo en lo que al movimiento de traslación del Centro de Masas se refiere.
- el par generado por la tensión, que genera torque-o momento-a favor del sentido positivo de rotación: TR
- el par de fricción, que se opone a la rotación del yoyó. El momento de la fuerza de fricción se opone al sentido positivo: $-f_r R$

La ecuación de Newton para el Centro de Masas del yoyó es

$$mg - T = ma \tag{11}$$

La ecuación de la rotación es

³Brazo de palanca es la distancia que hay entre el punto origen de momentos y la recta soporte de la fuerza cuyo momento se calcula.

$$\begin{aligned} TR - f_r R &= I\alpha \\ &= \frac{1}{2}mR^2\alpha \end{aligned} \quad (12)$$

Resumiendo, las ecuaciones del movimiento del sistema son:

$$mg - T = ma \quad (13)$$

$$TR - f_r R = I\alpha \quad (14)$$

Como la cuerda no desliza sobre la polea

$$\alpha = \frac{a}{R} \quad (15)$$

Así formuladas, las ecuaciones (13) y (14), equivalen a

$$mg - T = ma \quad (16)$$

$$T - f_r = \frac{I}{R^2}a \quad (17)$$

Sumando las ecuaciones anteriores se concluye que

$$mg - f_r = \left(m + \frac{I}{R^2}\right) a \quad (18)$$

Es decir

$$a = \frac{mg - f_r}{m + \frac{I}{R^2}} \quad (19)$$

que, naturalmente, coincide con el resultado obtenido antes.

Ahora se pueden calcular las tensiones T .

$$T = f_r + \frac{I}{R^2}a \quad (20)$$

donde f_r es la fuerza de rozamiento.

En el caso de la subida, hay una inversión del par de fricción y se tiene que

$$a = \frac{mg + f_r}{m + \frac{I}{R^2}} \quad (21)$$

$$T = -f_r + \frac{I}{R^2}a \quad (22)$$

Con esto se termina la descripción elemental del problema.

Debe notarse que la pérdida de energía es de ritmo constante en la subida y en la bajada, y por lo tanto la energía mecánica disminuirá linealmente con el tiempo en cada tramo de subida-bajada.

El problema sin rozamiento tiene Energía mecánica constante, las aceleraciones de subida y de bajada son las mismas y el cuerpo efectúa un vaivén continuo desde que se le suelta (suponiendo elasticidad total en el choque con el suelo, como es el caso tratado aquí).